Witold Bednarek

Konkurs matematyczny w gimnazjum

Przygotuj się sam!

OPOLE
Wydawnictwo NOWIK Sp.j.
2012

Spis treści

Od AUTORA

Książka przeznaczona jest dla uczniów klas gimnazjalnych, którzy zamierzają wziąć udział w konkursach matematycznych. Prezentowany zbiór umożliwia samodzielne przygotowanie się do zawodów, gdyż wszystkie zadania mają pełne rozwiązania. Zadania są pogrupowane w zestawy po 5 zadań. Każdy z nich zawiera tematy związane z arytmetyką, algebrą i geometrią. W każdym zestawie są zadania z gwiazdką o podwyższonym stopniu trudności. Gdyby rozwiązanie któregoś zadania sprawiało kłopoty, to należy w pierwszej kolejności skorzystać z podanej wskazówki i spróbować jeszcze raz. Dopiero wtedy, gdy to zawiedzie, można zapoznać się z przedstawionym rozwiązaniem, którego przeczytanie ze zrozumieniem będzie na pewno kształcące. Na końcu książki znajdują się zadania sprawdzające, których rozwiązanie całkowicie zależy od Czytelnika.

Życzę Czytelnikowi systematyczności, wytrwałości i matematycznych sukcesów.

Witold Bednarek

Rozgrzewka

Równania w liczbach całkowitych

Przykład 1.

Rozwiąż równanie $xy = x + y$ w liczbach całkowitych x i y.

Rozwiązanie

Mamy kolejno:

$$xy - x - y = 0, \ xy - x - y + 1 = 1, \ (x-1)(y-1) = 1.$$

Stąd $\begin{cases} x - 1 = 1 \\ y - 1 = 1 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x - 1 = -1 \\ y - 1 = -1. \end{cases}$

Zatem $(x, y) = (2, 2)$ lub $(x, y) = (0, 0)$.

Przykład 2.

Rozwiąż równanie $2xy = x + y + 1$ w liczbach całkowitych x i y.

Rozwiązanie

Mamy kolejno:

$$2xy - x - y = 1,$$

$$4xy - 2x - 2y = 2,$$

$$(2x-1)(2y-1) = 3.$$

Stąd $\begin{cases} 2x-1=1 \\ 2y-1=3 \end{cases}$ lub $\begin{cases} 2x-1=3 \\ 2y-1=1, \end{cases}$

lub $\begin{cases} 2x-1=-1 \\ 2y-1=-3, \end{cases}$ lub $\begin{cases} 2x-1=-3 \\ 2y-1=-1. \end{cases}$

Zatem $(x,\ y) \in \{(1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (0,\ -1),\ (-1,\ 0)\}$.

Przykład 3.

Rozwiąż równanie $xyz = x + y + z$ w zbiorze liczb naturalnych x, y, z.

Rozwiązanie

Załóżmy, że $x \le y \le z$. Dane równanie dzielimy przez xyz. Wówczas $1 = \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} + \frac{1}{yx}$. Gdyby $x \ge 2$, to $y \ge 2$ i $z \ge 2$.

Wtedy $\frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} + \frac{1}{yx} \le \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4}$, wbrew równaniu.

Zatem $x = 1$. Mamy więc równanie:

$$yz = 1 + y + z,$$
$$yz - y - z = 1,$$
$$yz - y - z + 1 = 2,$$
$$(y-1)(z-1) = 2.$$

Stąd $y - 1 = 1$ i $z - 1 = 2$, czyli $y = 2$ i $z = 3$.

Sprawdzamy, że trójka liczb $(x,\ y,\ z) = (1,\ 2,\ 3)$ spełnia wyjściowe równanie. Pozostałe trójki $(x,\ y,\ z)$ to: $(1,\ 3,\ 2)$, $(2,\ 3,\ 1)$, $(2,\ 1,\ 3)$, $(3,\ 2,\ 1)$, $(3,\ 1,\ 2)$.

Zasada szufladkowa Dirichleta w arytmetyce

Jeżeli $n+1$ przedmiotów umieścić w n szufladach, to w pewnej szufladzie będą co najmniej dwa przedmioty.

Przykład 1.

Wykaż, że spośród trzech dowolnych liczb całkowitych można wybrać liczbę podzielną przez 3 lub kilka liczb, których suma jest podzielna przez 3.

Rozwiązanie

Niech a, b, c będą liczbami całkowitymi. Rozważmy liczby $0, a, a+b, a+b+c$. Liczb tych jest cztery, a więc pewne dwie z nich dają przy dzieleniu przez 3 tę samą resztę. Zatem ich różnica będzie podzielna przez 3. Zauważmy, że różnice te wynoszą:

$$a-0=a,$$

$$a+b-0=a+b,$$

$$a+b+c-0=a+b+c,$$

$$a+b-a=b,$$

$$a+b+c-a=b+c,$$

$$(a+b+c)-(a+b)=c,$$

a więc któraś z tych liczb: a, $a+b$, $a+b+c$, b, $b+c$, c — jest podzielna przez 3.

Zestawy zadań

I

1. Znajdź wszystkie liczby naturalne n, dla których liczba $n^4 + 4$ jest pierwsza.

2. Niech k będzie liczbą całkowitą. Wykaż, że liczba $4k$ jest różnicą kwadratów dwóch liczb całkowitych.

3. Funkcja liniowa f spełnia warunki: $f(1)=3$ i $f(3)=1$. Oblicz $f(4)$.

★4. Pewien kwadrat i półkole mają równe obwody. Która z tych figur ma większe pole?

5. Wykaż, że przekątne równoległoboku dzielą się na połowy.

II

1. Znajdź wszystkie liczby naturalne n, dla których liczba $4n^4+1$ jest pierwsza.

2. Niech k będzie liczbą całkowitą. Wykaż, że liczba $4k+1$ jest różnicą kwadratów dwóch liczb całkowitych.

3. Rozwiąż równanie $|x-1|=|2x-3|$.

★4. Dla jakich m wykres funkcji $f(x)=mx+2-m$ ma co najmniej jeden punkt wspólny z kwadratem o wierzchołkach $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$.

★★5. Wykaż, że ze środkowych dowolnego trójkąta można zbudować trójkąt i pole tego trójkąta jest równe $\frac{3}{4}$ pola danego trójkąta.

III

1. Znajdź wszystkie liczby naturalne n, dla których liczba n^4+n^2+1 jest pierwsza.

2. Niech $ABCDEF$ będzie liczbą sześciocyfrową taką, że $A+D=B+E=C+F=9$.
Wykaż, że liczba $ABCDEF$ jest podzielna przez 37.

★**3.** Naszkicuj wykres funkcji $f(x)=||x-1|-2|$.

★**4.** Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt o bokach długości 6 cm, 8 cm i 10 cm.

5. Wykaż, że w żadnym trójkącie jego dwie dwusieczne kątów nie są prostopadłe.

IV

1. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p i q takie, że $p^2-6q^2=1$.

★★**2.** Niech n będzie liczbą naturalną. Wykaż, że liczby 12^n i 12^n+2^n mają taką samą liczbę cyfr.

3. Rozwiąż równanie $\sqrt{5-x}+\sqrt{x}=3$.

4. Liczby a i b są dodatnie oraz $ab=1$. Wykaż, że $a+b\geq 2$.

5. Oblicz pole koła wpisanego w trójkąt o bokach 13 cm, 13 cm i 10 cm.